Математическая логика и теория алгоритмов

ТУСУР, В.М. Зюзьков, 2020

Вариант 7

Задание 1. Определить операции $\cup$ и \ (каждую по отдельности) через операции Δ и $\cap$.

Решение.

Определим операцию объединения множеств через симметрическую разность множеств и пересечение множеств:

$$A\cup B \Leftrightarrow A\cap B\cup A\cap \bar{B}\cup \bar{A}\cap B \Leftrightarrow A\setminus B\cup B\setminus A\cup A\cap B \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (A\Delta B)\cup A\cap B$$

Так как $(A\Delta B)\cap(A\cap B)=\varnothing$, то $A\Delta B=(A\Delta B)\setminus(A\cap B)$ и $A\cap B=(A\cap B)\setminus(A\Delta B)$

Значит, $A\cup B \Leftrightarrow (A\Delta B)\setminus(A\cap B)\cup(A\cap B)\setminus(A\Delta B)\Leftrightarrow(A\Delta B)\Delta(A\cap B)$

Определим операцию дополнения до множества через симметрическую разность множеств и пересечение множеств:

Так как $A\setminus B \Leftrightarrow (A\cup B)\setminus B$ и $B\setminus(A\cup B)\Leftrightarrow\varnothing$, то

$$A\setminus B=(A\cup B)\setminus B \Leftrightarrow (A\cup B)\setminus B\cup\varnothing \Leftrightarrow (A\cup B)\setminus B\cup B\setminus(A\cup B)\Leftrightarrow(A\cup B)\Delta B$$

Из предыдущего пункта $A\cup B\Leftrightarrow(A\Delta B)\Delta(A\cap B)$, следовательно,

$$A\cup B\Leftrightarrow((A\Delta B)\Delta(A\cap B))\Delta B.$$

Задание 2. Является ли тавтологией формула $((p\supset q)\&(p\vee r)\&\neg r)\supset\neg p$?

Решение.

Предположим, что формула $((p\supset q)\&(p\vee r)\&\neg r)\supset\neg p$ ложна при некоторых значениях p,q,r. Представим наши рассуждения в виде таблицы. Каждая следующая строчка таблицы есть логическое следствие предыдущей строки.

$((p \supset q)\&(p \vee r)\&\neg r) \supset \neg p$ **= Л**	
$((p \supset q)\&(p \vee r)\&\neg r)$ **= И**	$\neg p$ **= Л**
$p \supset q$ **= И** $p \vee r$ **= И** $\neg r$ **= И**	$p =$ **И**
q **= И** (подставляем в формулу $p \supset q$ **=** **И** значение $p =$ **И**) r **= Л** (из $\neg r$ **= И**) **И** $\vee$ **Л = И** – верно.	

Найден набор значений переменных, при которых формула $((p \supset q)\&(p \vee r)\&\neg r) \supset \neg p$ будет ложна: p = И, q = И и r = Л.

Следовательно, заданная формула не является тавтологией.

Задание 3. Переведите с естественного языка на язык логики предикатов:

Для любого натурального числа найдется большее его простое число.

Решение.

Универсум: M = {множество действительных чисел, R}. Предикаты: $I(x)$ ≡ «x – натуральное число», $S(x)$ ≡ «x – простое число», $P(x,y)$ ≡ «y больше x».

Формула: $\forall x \exists y (I(x) \supset P(x,y) \& S(y))$.

Задание 4. Переведите с естественного языка на язык логики предикатов:

Все лягушки, увидев аиста, прыгают и квакают.

Решение.

Универсум: M = {множество животных}. Предикаты: $I(x)$ ≡ «x – лягушка», $A(x)$ ≡ «x – аист», $S(x,y)$ ≡ «x – увидел y», $P(x)$ ≡ «x прыгает», $R(x)$ ≡ «x квакает».

Формула: $\forall x \forall y (I(x) \& A(y) \& S(x,y) \supset P(x) \& R(x))$.

Задание 5. Для бинарного отношения $x\ \rho\ y \Leftrightarrow$ «x перпендикулярна y», определенного на множестве всех прямых плоскости, выясните, какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.

Решение.

Заданное отношение не рефлексивно, так как ни одна прямая не может быть перпендикулярной самой себе.

Симметрично, так как если прямая a перпендикулярна прямой c, то прямая c перпендикулярна прямой a.

Не антисимметрично, так как если прямая a перпендикулярна прямой c, то прямая c перпендикулярна прямой a.

Не транзитивно, так как для прямых, принадлежащих одной плоскости: если $a \perp b$ и $b \perp c$, то $a \parallel c \Rightarrow a \not\perp c$.

Следовательно, заданное отношение не рефлексивно, симметрично, не антисимметрично, не транзитивно.

Задание 6. На множестве **R** вещественных чисел задано отношение $a\ \rho\ b$ $\Leftrightarrow$ «$a^2 = b^2$». Докажите, что это отношение эквивалентности, и найдите классы эквивалентности.

Решение.

Отношением эквивалентности называется одновременно рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение.

Рефлексивность: $a\ \rho\ a$ – действительно, $a^2 = a^2$ для любого $a \in \mathbf{R}$.

Симметричность: $a\ \rho\ b \Leftrightarrow$ «$a^2 = b^2$» $\Leftrightarrow$ «$b^2 = a^2$» $\Leftrightarrow b\ \rho\ a$.

Транзитивность: $a\ \rho\ b$ и $b\ \rho\ c \Leftrightarrow$ «$a^2 = b^2$» и «$b^2 = c^2$» $\Leftrightarrow$ «$a^2 = c^2$» $\Leftrightarrow a\ \rho\ c$.

Отношение эквивалентности доказано.

Классы эквивалентности: $\{-a, a\}$, $\{0\}$, где $a \in \mathbb{R}^+$.

Задание 7. Используя математическую индукцию, докажите, что

$$1+4+7+10+\ldots+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}.$$

Решение.

Проверим при $n=1$: $3\cdot 1-2=1 \quad = \quad \frac{1\cdot(3\cdot 1-1)}{2}=1$ - выполнено.

Предположим, $1+4+7+10+...+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}$ выполняется при $n=k$:

$1+4+7+10+...+(3k-2)=\frac{k(3k-1)}{2}$.

Докажем, при $n=k+1$:

$$1+4+7+10+...+(3k-2)+(3(k+1)-2)=\frac{k(3k-1)}{2}+(3(k+1)-2)=$$

$$=\frac{k(3k-1)}{2}+(3k+1)=\frac{3k^2-k+6k+2}{2}=\frac{3k^2+5k+2}{2}=$$

$$=\left[\begin{array}{l} 3k^2+5k+2=0 \\ D=25-24=1 \\ k_{1,2}=\frac{-5\pm 1}{6}, \\ k_1=-1, k_2=-\frac{2}{3} \\ 3k^2+5k+2=3(k+1)\left(k+\frac{2}{3}\right)=(k+1)(3k+2) \end{array}\right]=$$

$$=\frac{(k+1)(3k+2)}{2}=\frac{(k+1)(3(k+1)-1)}{2}$$

Доказано при $n=k+1$.

Следовательно, утверждение $1+4+7+10+...+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}$ доказано методом математической индукции для всех натуральных n.

Задание 8. Расположите следующие 5 функций в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть O (следующая)):

$2^{2^n}/1000$, $0{,}00012^{2^{n+1}}$, $0{,}001\left(\frac{3}{2}\right)^n$, $0{,}001$, $25n^3$.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{0{,}001\left(\frac{3}{2}\right)^n}{2^{2^n}/1000}=\lim_{n\to\infty}\frac{1{,}5^n}{2^{2^n}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{d1{,}5^n/dn}{d2^{2^n}/dn}=\lim_{n\to\infty}\frac{1{,}5^n\cdot\ln 1{,}5}{2^{2^n}\cdot\ln 2\cdot 2^n\cdot\ln 2}=$$

$$=\frac{\ln 1{,}5}{\ln^2 2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{2^n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^n}=\frac{\ln 1{,}5}{\ln^2 2}\cdot 0\cdot 0<\infty.$$

Следовательно, функция $2^{2^n}/1000$ мажорирует функцию $0,001\left(\frac{3}{2}\right)^n$, то есть

$0,001\left(\frac{3}{2}\right)^n = O\left(2^{2^n}/1000\right)$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{25n^3}{0,001\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n} = 25000\lim_{n\to\infty}\frac{25n^3}{1,5^n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 25000\lim_{n\to\infty}\frac{dn^3/dn}{d1,5^n/dn} = 25000\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{1,5^n\cdot\ln 1,5} =$$

$$= \frac{75000}{\ln 1,5}\lim_{n\to\infty}\frac{dn^2/dn}{d1,5^n/dn} = \frac{75000}{\ln 1,5}\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{1,5^n\cdot\ln 1,5} = \frac{150000}{\ln^2 1,5}\lim_{n\to\infty}\frac{dn/dn}{d1,5^n/dn} = \frac{150000}{\ln^2 1,5}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1,5^n\cdot\ln 1,5} =$$

$$= \frac{150000}{\ln^3 1,5}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1,5^n} = \frac{150000}{\ln^3 1,5}\cdot 0 = 0 < \infty$$

Следовательно, функция $0,001\left(\frac{3}{2}\right)^n$ мажорирует функцию $25n^3$, то есть

$25n^3 = O\left(0,001\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{0,001}{25n^3} = \left[\frac{0,001}{\infty}\right] = 0.$$

Следовательно, функция $25n^3$ мажорирует функцию 0,001, то есть $0,001 = O\left(25n^3\right)$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(0,00012^{2^{n+1}}\right)^{\to 0}}{0,001} = 0.$$

Следовательно, функция 0,001 мажорирует функцию $0,00012^{2^{n+1}}$, то есть $0,00012^{2^{n+1}} = O(0,001)$.

Расположим функции в порядке увеличения скорости роста:

$0,00012^{2^{n+1}}$, 0,001, $25n^3$, $0,001\left(\frac{3}{2}\right)^n$, $2^{2^n}/1000$.